GRADOS EN INGENIERÍA

Curso Cero

Curso 2025/26

Pedro José Hernando Oter

Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Tema 3

Funciones Potenciales, Exponenciales y Logarítmicas

- Funciones Potenciales y Radicales
- Funciones Exponenciales
- Funciones Logarítmicas
- Resolución de Ecuaciones

Funciones Potenciales

Potencias

$$a^b \quad \begin{cases} a & : \ \text{base} \\ b & : \ \text{exponente} \end{cases} \qquad ; \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- Si $b = 0$ $\qquad \boxed{a^0 = 1}$
- Si $b \in \mathbb{N}$ $\qquad \boxed{a^b = \underbrace{a\, a \cdots a}_{b}}$
- Si $b \in \mathbb{Q}$, $b = \frac{p}{q}$ $\qquad \boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = x \implies x^n = a}$$

- Si $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\qquad \boxed{a^b = e^{b \ln a}} \qquad \boxed{a^{-b} = \frac{1}{a^b}}$

Funciones Potenciales

$$\boxed{2^\pi \qquad ; \qquad \pi = 3,141592\cdots}$$

$$\begin{aligned} 2^3 & & &= 8 \\ 2^{3,1} = 2^{31/10} &= \sqrt[10]{2^{31}} & &= 8,5741... \\ 2^{3,14} = 2^{314/100} &= \sqrt[100]{2^{314}} & &= 8,8152... \\ \vdots & & & \ \ \vdots \\ 2^\pi & & &= 8,8249... \end{aligned}$$

$$2^\pi = e^{\pi \ln 2} = e^{2,17758...} = 8,8249...$$

Funciones Potenciales

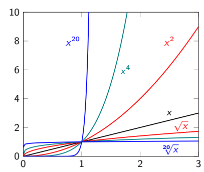
Propiedades Básicas de las Potencias

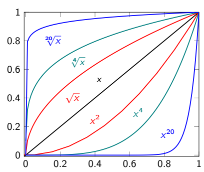
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Funciones Potenciales

Función Potencial

$$\boxed{f(x) = x^a} \quad , \quad a \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a > 1 : & \text{Potencial} \\ 0 < a < 1 : & \text{Radical} \\ a = 0 : & \text{Func. constante (1)} \\ a < 0 : & \text{Racional o Radical} \end{cases}$$



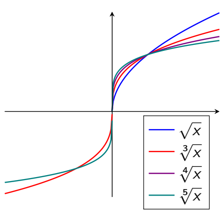


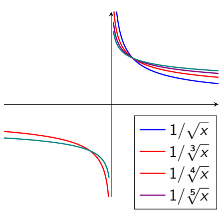
Funciones Irracionales o Radicales

Funciones Irracionales o Radicales

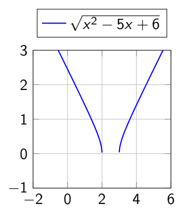
$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{g(x)} = [g(x)]^{1/n}}$$

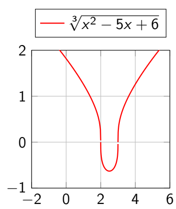
$$\sqrt[n]{x} \quad \begin{cases} n : & \text{índice} \\ x : & \text{radicando} \end{cases}$$

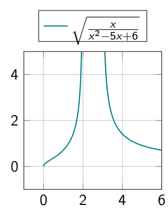




Funciones Irracionales o Radicales



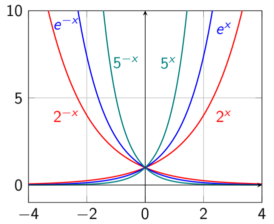




Funciones Exponenciales

Funciones Exponenciales

$\boxed{f(x) = a^x}$; $a > 0$, $a \neq 1$ $\boxed{f(x) = e^x}$



Funciones Logarítmicas

Funciones Logarítmicas

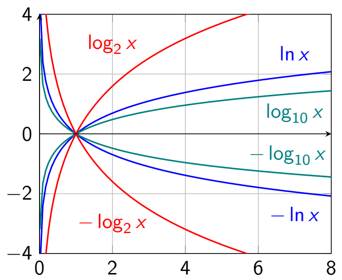
$\boxed{\log_b x = a \iff b^a = x}$ $\boxed{\ln x = \log_e x = a \iff e^a = x}$

$\log_c a = \boxed{(\log_c b)} (\log_b a)$ (Cambio de Base)

Propiedades

- $\log(ab) = \log a + \log b$
- $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$
- $\log a^b = b \log b$

Funciones Logarítmicas



Ecuaciones

Ecuación

Una ecuación en **una variable** es una expresión de la forma:

$$f(x) = 0$$

donde $f(x)$ es una función y x la incógnita.

Solución

Se denomina solución de una ecuación al conjunto de valores x que verifican la ecuación.

Resolver

Resolver una ecuación es hallar (en caso de que existan) sus soluciones.

Tipos de Ecuaciones

Tipos de Ecuaciones

- Ec. Radicales o Irracionales
- Ec. Exponenciales
- Ec. Logarítmicas

Ecuaciones Radicales o Irracionales

Ecuaciones Radicales o Irracionales

Aquellas en las que la incógnita aparece bajo algún radical (raíz n-ésima).

Ejemplo: $\dfrac{\sqrt[n]{P(x)}}{Q(x)} + \sqrt[m]{R(x)} = \dfrac{M(x)}{N(x)}$

Resolución

1. Se separa en uno de los miembros un único radical.
2. Se eleva a la potencia adecuada (índice de raíz) $\Longrightarrow$ Desaparece esa Raíz
3. Se repiten el proceso hasta que no yo aparezcan radicales $\Longrightarrow$ Ec. Racional

Este proceso puede añadir algunas soluciones extrañas (comprobar en la ec. original!)

Ecuaciones Irracionales

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x+1} - 4 = 0$$

Solución

$$\sqrt[3]{x-1} = 4 - \sqrt{x+1} \quad ; \quad \left(\sqrt[\cancel{3}]{x-1}\right)^{\cancel{3}} = \left(4 - \sqrt{x+1}\right)^3$$

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3}$$

$$x - 1 = 4^3 - 3 \cdot 4^2 \sqrt{x+1} + 3 \cdot 4(x+1) - \sqrt{(x+1)^3}$$

$$\left(\cancel{\sqrt{}}(x+1)^3\right)^{\cancel{2}} = \left(4^3 - 34^2 \sqrt{x+1} + 3 \cdot 4(x+1) - (x-1)\right)^2$$

$$\vdots$$

Ecuaciones Exponenciales

Ecuaciones Exponenciales

Aquellas en las que la incógnita aparece en los exponentes.

Ejemplo: $a^{P(x)} + b^{Q(x)} = R(x)$

Métodos de Resolución

1. Siempre que las bases de las potencias sean positivas:
$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$$
2. Aplicación de **logaritmos** (siguiente apartado).

Siempre comprobar si hay soluciones extrañas.

Ecuaciones Logarítmicas

Ecuaciones Logarítmicas

Aquellas en las que la incógnita está en el argumento o la base de algún logaritmo.

Ejemplo: $\log_a P(x) + \log_{f(x)} Q(x) = R(x)$

Métodos de Resolución

1. Propiedades

$$\boxed{\log_b x = y \iff b^y = x} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\log(ab) = \log a + \log b} \\ \boxed{\log a^b = b \log a} \\ \vdots \end{array} \right. \quad ; \quad \boxed{\log_a x = (\log_a b) \log_b x}$$

2. $\boxed{\log_a x = \log_a y \implies x = y}$

Funciones
Ecuaciones
Ecuaciones Radicales o Irracionales
Ecuaciones Exponenciales
Ecuaciones Logarítmicas

Ecuaciones Logarítmicas

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación:

$$5 \log_{10} x - \log_{10} 32 = \log_{10} \left(\frac{x}{2} \right)$$

Solución

$$\log_{10} \left(\frac{x^5}{32} \right) = \log_{10} \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\boxed{\frac{x^5}{32} = \frac{x}{2}} \quad ; \quad x^5 = 16x \quad ; \quad x(x^4 - 16) = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 0} \\ x^4 = 16 \end{array} \right.$$

$$(x^2)^2 = 16 \quad ; \quad x^2 = \pm 4 \quad ; \quad x = \sqrt{+4} = \pm 2 \implies \boxed{x_2 = 2} \quad , \quad \boxed{x_3 = -2}$$

Como el logaritmo sólo está definido para números positivos, la única posible solución es:

$$\boxed{x = 2} \implies \text{Comprobar solución!}$$