GRADOS EN INGENIERÍA

# Curso Cero

Curso 2025/26

Pedro José Hernando Oter

*Departamento de Matemáticas*
Universidad Carlos III de Madrid





Tema 2

## Desigualdades e Inecuaciones

- La Recta Real
- Intervalos
- Operaciones: Unión, Intersección y Diferencia
- Relaciones de Orden
- Resolución de Inecuaciones
- Inecuaciones con Valor Absoluto





## La Recta Real

**Recta Real**

La **recta real** es una representación geométrica del conjunto $\mathbb{R}$.

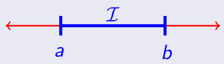




## Intervalos

**Intervalos**

Un **intervalo** $\mathcal{I}$ es un conjunto de números reales que corresponde a un *segmento* de la *recta real*, con **extremos** $a \leq b$.




Los intervalos pueden estar formados por **infinitos elementos**, **un solo elemento** o por **ninguno** (conjunto vacío, $\varnothing$).

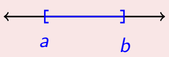


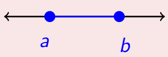


## Intervalos

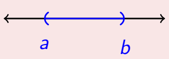
**Tipos de Intervalos** $(a \leq b)$

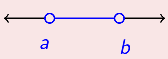
- **Intervalo Cerrado**: $\boxed{[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x \leq b\}}$




- **Intervalo Abierto**: $\boxed{(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b\}}$








## Intervalos

**Nota**

- $[a,a] = \{a\}$
- $(a,a) = \varnothing$

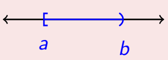


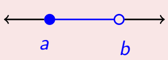


## Intervalos

**Semi-Intervalos**

- **Intervalo Semi-(abi,cer)**: $\boxed{[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x < b\}}$




**Nota**

- $[a,a) = (a,a] = [a,a] = \{a\}$





## Intervalos Infinitos

**Infinito**

El símbolo infinito $\infty$ representa una cantidad más grande que cualquier número real.

**No es un número**

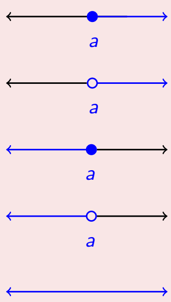
**Símbolo Infinito**

- $\infty > a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $-\infty < a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

## Intervalos Infinitos

### Intervalos Infinitos

- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq a\}$
- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > a\}$
- $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq a\}$
- $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < a\}$
- $(-\infty,\infty) \ \equiv \ \mathbb{R}$








## Intervalos

### Operaciones Básicas con Intervalos

Dados dos intervalos $A$ y $B$.

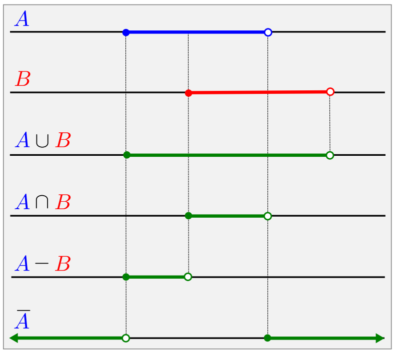
| | | | |
|---|---|---|---|
| **Unión** | $A \cup B$ | : | elementos de $A$ y/o $B$ |
| **Intersección** | $A \cap B$ | : | elementos de $A$ y $B$ |
| **Diferencia** | $A - B$ | : | elementos de $A$ pero no de $B$ |
| **Complementario** | $\overline{A}$ | : | elementos que *no* pertenecen a $A$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Conjunto Vacío** | $\varnothing$ | $=$ | $(2,2)$ |
| **Elementos individuales** | $\{-1,3,5\}$ | $=$ | $[-1,-1] \cup [3,3] \cup [5,5]$ |





## Intervalos








## Desigualdades

### Desigualdad

Una desigualdad es una **expresión** que involucra alguna relación de orden:

$\boxed{\text{Relaciones de Orden:} \quad > \quad , \quad < \quad , \quad \geq \quad , \quad \leq}$

### Ejemplos

$\boxed{6 \geq 2}$ $\qquad$ $\boxed{\sqrt{x-1} < \operatorname{sen}(x+1)}$

### Inecuaciones

- Las desigualdades que contienen **incógnitas** (variables desconocidas) se denominan **inecuaciones**.
- **Resolver** una *inecuación* es encontrar (si existen) los valores (intervalos) que la verifican.





## Desigualdades

### Propiedades de las Desigualdades

1. $a < b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a+c < b+c \\ a-c < b-c \end{cases}$
2. $a \geq b \quad , \quad c > 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} ac \geq bc \\ \dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c} \end{cases}$
3. $a \leq b \quad , \quad c < 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} ac \geq bc \\ \dfrac{a}{c} \geq \dfrac{b}{c} \end{cases}$ $\qquad \boxed{\begin{array}{ccc} > & \Longrightarrow & < \\ < & \Longrightarrow & > \\ \geq & \Longrightarrow & \leq \\ \leq & \Longrightarrow & \geq \end{array}}$





## Resolución de Inecuaciones

### Inecuaciones Simples (Lineales)

$\boxed{f_1(x) \quad RO \quad f_2(x)}$ $\qquad$ $RO$ : Relación de Orden $(>, <, \leq, \geq)$





## Resolución de Inecuaciones

### Inecuaciones Compuestas

$\boxed{f_1(x) \quad RO_1 \quad f_2(x) \quad RO_2 \quad f_3(x) \quad RO_3 \quad \cdots RO_n \quad f_{n+1}(x)}$

$$\left\{ \begin{array}{llll} f_1(x) & RO_1 & f_2(x) & \longmapsto \ I_1 \\ f_2(x) & RO_2 & f_3(x) & \longmapsto \ I_2 \\ \vdots & & & \\ f_n(x) & RO_n & f_{n+1}(x) & \longmapsto \ I_n \end{array} \right\} \Longrightarrow \boxed{I = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n}$$





## Resolución de Inecuaciones

### Desigualdades Polinómicas

$\boxed{P_n(x) \quad RO \quad Q_m(x)}$

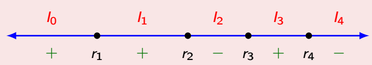
1. Pasar todos los términos a uno de los miembros y simplificar.

$$R_k(x) \quad RO \quad 0 \qquad (1)$$

2. Calcular las **raíces** reales del polinomio resultante.

$$R_k(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{sol. real} = \{r_1, r_2, \cdots\}$$

3. Posicionar las *raíces* $r_n$ en la recta real y estudiar el signo de $R_k(x)$ en cada uno de los intervalos $I_n$ en los que queda dividida la recta real mediante las *raíces*.




4. Los intervalos solución serán aquellos que cumplan la relación de orden $RO$ dada por la *desigualdad* (1).

## Resolución de Inecuaciones

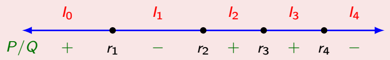
**Desigualdades Racionales**

Expresamos la desigualdad para que tenga esta forma: $\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \quad RO \quad 0}$

1. Calcular las *raíces reales* de cada uno de los *polinomios* y ordenarlos de forma conjunta.

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{sol. reales de ambos} = \{r_1, r_2, \cdots\}$$

2. Posicionar todas las *raíces* $r_n$ en la recta real y estudiar el signo del cociente $P/Q$ en cada uno de los intervalos $I_n$.




3. Los *intervalos solución* serán aquellos que cumplan la relación de orden *RO* dada por la función racional $P(x)/Q(x)$.



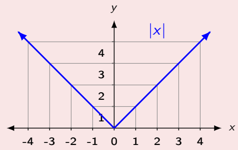


## Valor Absoluto

**Valor Absoluto**

Se denomina **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ y se representa por $|x|$, al número real dado por:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \left\{ \begin{array}{rll} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x < 0 \end{array} \right.$$








## Desigualdades con Valores Absolutos

- $|x| = a \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} a > 0 & \rightarrow & x = \pm a \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x \in \{-a, a\}} \\ a = 0 & \rightarrow & \boxed{x = 0} \\ a < 0 & \rightarrow & \text{no existe solución} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\nexists x \quad \Longrightarrow \quad \varnothing} \end{array} \right.$

- $|x| < a \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} a > 0 & \rightarrow & \boxed{-a < x < a} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x \in (-a, a)} \\ a \leq 0 & \rightarrow & \text{no existe solución} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\nexists x \quad \Longrightarrow \quad \varnothing} \end{array} \right.$

- $|x| > a$

$$\left\{ \begin{array}{lll} a \geq 0 & \rightarrow & \boxed{x < -a \quad \text{ó} \quad x > a} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)} \\ a < 0 & \rightarrow & \boxed{x \in \mathbb{R}} \end{array} \right.$$

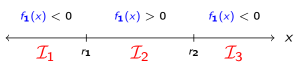




## Desigualdades con Valores Absolutos

CASO 1: $\boxed{|\,f_1(x)\,| \quad RO \quad f_2(x)}$ (*RO*: rel. orden)

Eliminación Val. Abs. $\quad \Longrightarrow \quad f_1(x) = 0 \quad \rightarrow \quad$ raíces $= \{r_1,\ r_2\}$




$$\forall x \in \mathcal{I} \left\{ \begin{array}{llll} \text{si} & f_1(x) \geq 0 & \rightarrow & |f_1(x)| = f(x) \\ \text{si} & f_1(x) < 0 & \rightarrow & |f_1(x)| = -f(x) \end{array} \right.$$

$$\boxed{|\,f_1(x)\,| \quad RO \quad f_2(x)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{llllll} \text{si} & x \in \mathcal{I}_1 & \rightarrow & -f_1(x)\ RO\ f_2(x) & \rightarrow & \boxed{x \in S_1 \cap \mathcal{I}_1 = X_1} \\ \text{si} & x \in \mathcal{I}_2 & \rightarrow & f_1(x)\ RO\ f_2(x) & \rightarrow & \boxed{x \in S_2 \cap \mathcal{I}_2 = X_2} \\ \text{si} & x \in \mathcal{I}_3 & \rightarrow & -f_1(x)\ RO\ f_2(x) & \rightarrow & \boxed{x \in S_3 \cap \mathcal{I}_3 = X_3} \end{array} \right.$$

$$\boxed{x \in X_1 \cup X_2 \cup X_2}$$





## Desigualdades con Valores Absolutos

CASO 2: $\boxed{|\,f_1(x)\,| \quad RO \quad |\,f_2(x)\,|}$

- Al igual que antes, este problema se **transforma** en otros equivalentes, que no contengan el *valor absoluto*.

1. Buscamos las *raíces* de ambas funciones, $\{r_1, r_2, \cdots\}$ y $\{s_1, s_2, \cdots\}$,
2. Se disponen en la **recta real** obteniéndose *intervalos* $\mathcal{I}_k$ de estudio
3. En cada $\mathcal{I}_k$ se sustituye el valor absoluto y se resuelve
4. La solución final será la **unión** de todas