GRADOS EN INGENIERÍA

Curso Cero

Curso 2025/26

Pedro José Hernando Oter

Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Índice del Curso

Índice

- En los últimos 15-20 min se hará un pequeño control
- Necesaria asistencia superior al 50%
- Transparencias: `www.classde.es`

Tema 1

Polinomios y Funciones Racionales

Tipos de Números

- Naturales : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Enteros : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Racionales : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \;:\; a \in \mathbb{Z} \;,\; b \in \mathbb{N}\right\}$
- Irracionales : $\mathbb{I} = \{\text{Infinitos decimales no periódicos}\}$
- Reales : $\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}}$
- Complejos : $\mathbb{C} = \{a + bi \;:\; a, b \in \mathbb{R} \;,\; i = \sqrt{-1}\}$; $\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$

Polinomios

Definición

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R}$$

- $a_i x^i$: **monomio** de **grado** i
- a_i : **Coeficientes**
- x : **variable independiente**

- n : Grado del polinomio (si $a_n \neq 0$)
- a_n : **Coeficiente principal** o director
- a_0 : **Término independiente**

Operaciones Básicas con Polinomios

- Suma/Resta:

$$P(x) \pm Q(x) = (a_n \pm b_n) x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (a_0 \pm b_0)$$

- Producto:

$$P(x) \cdot Q(x) = (a_n x^n + \ldots + a_0) \cdot (b_n x^n + \ldots + b_0)$$

- Potencia:

$$P^n(x) = \underbrace{P(x) \cdot P(x) \cdot \ldots \cdot P(x)}_{n}$$

División o Cociente de Polinomios

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}} \qquad \text{Grado } P(x) \geq \text{grado } Q(x)$$

Dividendo	P(x)	Q(x)	Divisor
Resto	R(x)	C(x)	Cociente

Descomposición de un Polinomio

$$\boxed{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)} \qquad \text{Grado } R(x) < \text{grado } Q(x)$$

Divisibilidad de Polinomios

Definición

Se dice que un polinomio $P(x)$ es divisible por otro polinomio $Q(x)$ si el **resto** del cociente $P(x)/Q(x)$ es cero.

$$\boxed{P(x) = Q(x) \cdot C(x)}$$

Regla de Ruffini

Regla de Ruffini

$$\frac{P(x)}{x \pm a} \Longrightarrow \text{Regla de Ruffini}$$

Ejemplo

$3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 \quad | \; x - 2$

	3	-5	2	-7
2		6	2	8
	3	1	4	1

$Q(x) = 3x^2 + x + 4$

$R(x) = 1$

Raíces de un Polinomio

Raíz o Cero de un Polinomio

Se dice que $r \in \mathbb{C}$ es una raíz o cero del polinomio $P(x)$ si:

$$\boxed{P(r) = 0} \Longrightarrow P(x) = (x - r)C(x) + \underbrace{0}_{R(x)}$$

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

- *Todo polinomio de **grado** n tiene **exactamente** n **raíces** reales y/o complejas, iguales y/o distintas.*
- *En caso de que un número complejo $a + bi$ sea raíz de un polinomio, entonces siempre su **complejo conjugado** $a - bi$ también es raíz del polinomio, de forma que* <u>*las raíces complejas siempre aparecen a pares*</u> $\boxed{a \pm bi}$.

Raíces de un Polinomio

Cálculo Práctico de las Raíces de un Polinomio

Dado un polinomio $P(x)$ con todos sus coeficientes a_i **enteros**.

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} \quad ; \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

1. Si tiene una raíz **entera** r , ésta debe ser un **divisor** de a_0.
2. Si tiene una raíz **racional** $r = \frac{p}{q}$ (irreducible), entonces el numerador p debe ser un **divisor** de a_0 y el denominador q debe ser un **divisor** del coeficiente principal a_n.

Raíces de un Polinomio

Raíces del Polinomio Lineal y Cuadrático

$$P(x) = bx + c \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-c}{b}}$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Raíces de un Polinomio

Descomposición en Factores (Factorización)

Si un polinomio $P(x)$ de grado n tiene las raíces $r_1, \ldots r_m$, entonces se puede **descomponer** de la forma:

$$\boxed{P(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_m)C_m(x)}$$

donde $C_m(x)$ es un polinomio de grado $n - m$.

Raíces de un Polinomio

Multiplicidad de una Raíz

La **multiplicidad** de una raíz de un polinomio de grado n es el **número de veces que se repite** esa raíz en el conjunto de las n raíces del polinomio.

Descomposición en Factores Simples

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \quad \left\{ \begin{array}{lll} r_1 & \text{multiplicidad} & s \\ r_2 & \text{multiplicidad} & m \\ & \vdots & \\ \alpha \pm \beta i & \text{multiplicidad} & k \\ & \vdots & \end{array} \right.$$

$$\boxed{P(x) = a_n(x - r_1)^s(x - r_2)^m \cdots [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k \cdots}$$

Raíces de un Polinomio

Proceso de Factorización de un Polinomio

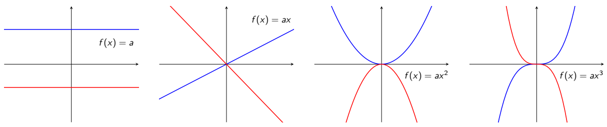
1. Encontrar una raíz sencilla del polinomio
2. Descomponer el polinomio aplicando **Ruffini**
3. Repetir el proceso hasta reducir el polinomio a **grado dos**
4. Aplicar la fórmula de la ec. cuadrática para encontrar sus dos últimas raíces
5. Factorizar el polinomio con todas sus raíces (**descomposición en factores simples**)

Funciones Polinómicas

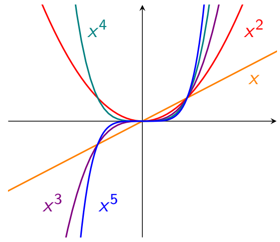
$$\boxed{P_n(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{R} \\ a_n \neq 0 \end{array} \right.$$

Funciones Polinómicas

Monomios

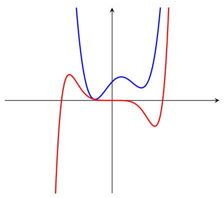


Funciones Polinómicas



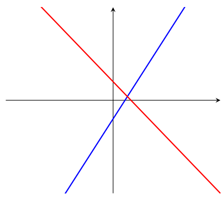
Funciones Polinómicas

Polinomios



Funciones Polinómicas

Funciones Lineales

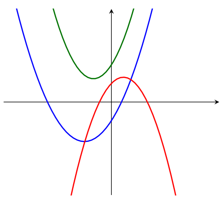


$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

- **Pto corte eje** x : $\boxed{\text{raíz}}$ $\Longrightarrow$ $x = -\dfrac{b}{a}$
- **Pendiente** : $m = a$

Funciones Polinómicas

Funciones Cuadráticas

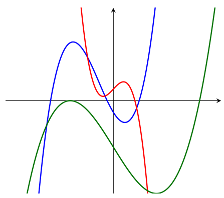


- **Ptos corte eje** x : $\boxed{\text{raíces reales}}$ $\Longrightarrow$ (dos, una o ninguna)
- **Vértice (Máx/Mín)** :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2ax + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = -\dfrac{b}{2a}}$$

Funciones Polinómicas

Funciones Cúbicas



- **Ptos corte eje** x : $\boxed{\text{raíces reales}}$ $\Longrightarrow$ una, dos (una doble), o tres
- **Máx/Mín** :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$\boxed{\text{raíces reales}}$ $\Longrightarrow$ dos, una (pto inflexión) o ninguna

Funciones Racionales

$$\boxed{R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}}$$

- Los **ceros** (puntos de corte con el eje x) son las **raíces reales** del numerador $P_n(x)$.
- No está definida en las **raíces reales** del polinomio del *denominador* $Q_m(x)$ (**discontinuidad / asíntota vertical**)
- El comportamiento de los **extremos** dependen del grado del numerador y denominador:
  - Si $n > m$ la función tiende a $\pm\infty$ en sus **extremos**.
  - Si $n < m$ la función tiende a 0 en sus **extremos**.
  - Si $n = m$ la función tiende en sus **extremos** al valor cte del cociente de los coeficientes principales de $P_n(x)$ y $Q_m(x)$.

Funciones Racionales